I -Fonctions de référence – sens de variation

Généralités

Définition :

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
On définit une fonction f sur D si à chaque réel x de D on associe un réel et un seul noté f(x).

Définition :

On appelle **représentation graphique** de f ou **courbe représentative** de f, l'ensemble des points M de coordonnées (x ;y) tels que **x appartient à D et y = f(x)**.

Notation :

On note, pour $x \in D$, $x \longmapsto f(x)$

Vocabulaire :

- Le réel f(x) est l'**image** de x par la fonction f.
- Si f(x) = y, on dit que x est un **antécédent** de y par la fonction f.

Définitions :

Soit u et v des fonctions définies sur l'intervalle I et k une constante réelle.

- La fonction notée ku associe à tout réel x de I le réel $k\times u(x)$.
- La fonction u + v associe à tout réel x de I le réel u(x) + v(x)
- La fonction $u\times v$ associe à tout réel x de I le réel $u(x)\times v(x)$.

Exemple :

Si u est définie par $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x - 1$, alors :
$(u + v)(x) = u(x) + v(x) = x^2 + 2x - 1$ et $(u\times v)(x) = u(x)\times v(x) = x^2\times(2x - 1)$.

Sens de variation d'une fonction

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est **croissante** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I tels que a < b, on a $f(a) \leq f(b)$.
- f est **décroissante** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I tels que a < b, on a $f(a) \geq f(b)$.

Remarque :

f est **monotone** sur un intervalle I si elle est croissante ou décroissante sur I.

A noter :

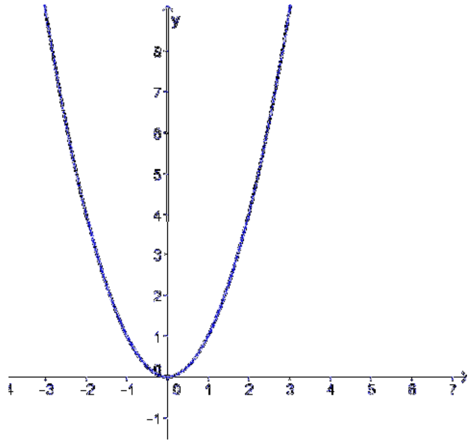
Si l'on remplace $\leq$ et $\geq$ par < et >, on dit que la fonction est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Fonctions de référence

Propriété : **Fonction affine f : $x \longmapsto ax + b$**

- Si a > 0, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si a < 0, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si a = 0, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

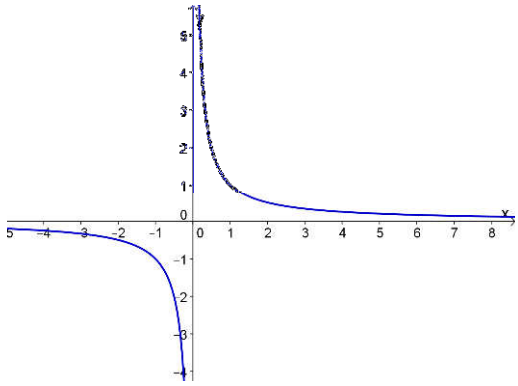
Cas particulier : Si b = 0, f est une fonction linéaire. ($x \longmapsto ax$).



Propriété : **Fonction carré f : x $\longmapsto$ x²**

La fonction carré est décroissante sur] - +∞ ;0] et croissante sur [0 ; + +∞[.

Sa représentation graphique est une parabole qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété : **Fonction inverse f : x $\longmapsto \frac{1}{x}$**

La fonction inverse est décroissante sur] - +∞ ;0[et décroissante sur]0 ; + +∞[.

Sa représentation graphique est une hyperbole qui est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété : **Fonction polynôme du second degré f : x $\longmapsto$ ax² + bx + c (a ≠ 0)**

- Si a > 0, f est décroissante, puis croissante : elle admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.
- Si a < 0, f est croissante, puis décroissante : elle admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

Sa représentation graphique est une parabole qui est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Définition :

La fonction f définie par f : x $\longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec c ≠ 0 est appelée **fonction homographique**.

II –Fonction racine carrée et fonction cube

Fonction racine carrée

Définition :

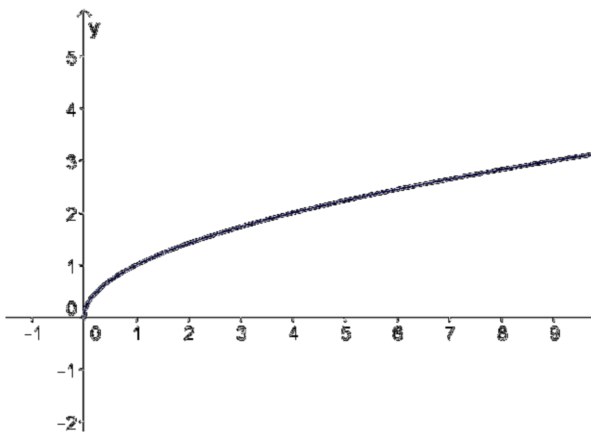
La fonction f définie par f : x $\longmapsto \sqrt{x}$ est appelée fonction **racine** carrée.
Elle est définie sur l'intervalle [0 ; + +∞[.

Propriété :

La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; + +∞[.

Tableau de variation :

x	0 ↗ +∞
$\sqrt{x}$	0 ↗



Fonction cube

Définition :

La fonction f définie par f : $x \longmapsto x^3$ est appelée **fonction cube**.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

La fonction cube est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

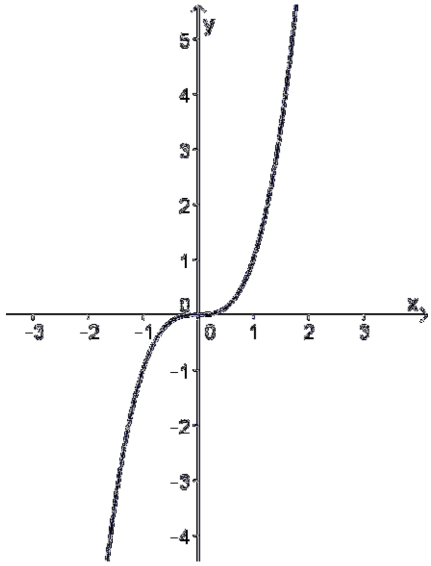
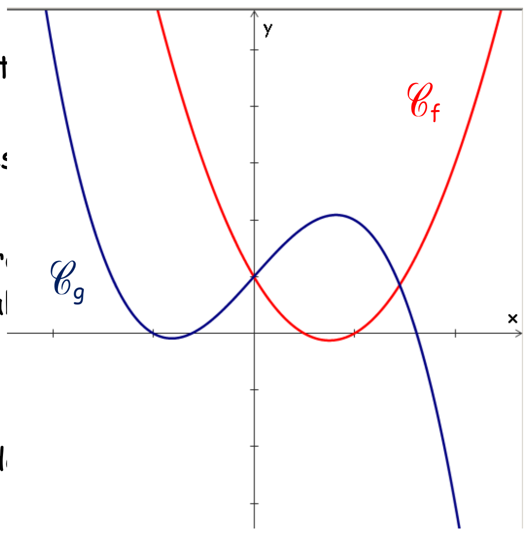


Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
x^3	↗

La courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Résolution graphique d'équations ou d'inéquations



Soit f et g deux fonctions de courbes représentatives sont

Résolution graphique de l'équation f(x) = g(x)

Les solutions de l'équation f(x) = g(x) sont les abscisses des des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Lorsque g est une fonction constante telle g(x) = k, on retr

En particulier, les solutions de l'équation f(x) = 0 sont les a de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

Résolution graphique de l'inéquation f(x) < g(x)

Les solutions de l'inéquation f(x) < g(x) sont les abscisses d dessous » de $\mathscr{C}_g$.

Lorsque g est une fonction constante telle g(x) = k, on retrouve l'inéquation f(x) < k.

En particulier, les solutions de l'équation f(x) < 0 sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de l'axe des abscisses.

Position relative de deux courbes

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence f(x) – g(x).