3ème D **Sujet 1 2016-2017**

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

NOM :	**Prénom :**

<u>Compétences évaluées</u>	A	B	C	D	E
Décomposer en produit de facteurs premiers et rendre une fraction irréductible.					
Utiliser les triangles égaux et semblables.					
Transformer un point ou une figure par homothétie.					
Démontrer.					

Exercice 1 : 6 points

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 18 200 et 269 500.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{18\,200}{269\,500}$.

c) Pour déterminer le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve tous les facteurs premiers en attribuant l'exposant le plus élevé aux facteurs premiers communs aux deux entiers.
En déduire le plus petit commun multiple à 18 200 et 269 500.

<u>Exercice 2</u> : 7 points

a) Construire un carré ABCD de côté 3 cm.
Placer un point O à l'extérieur du carré.
Construire l'image A'B'C'D' du carré ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.
Faire apparaitre les traits de constructions en pointillés.

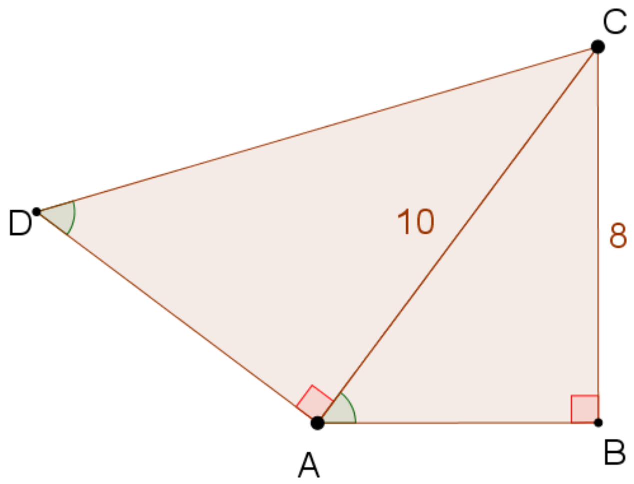
b) Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ? Justifier

c) Calculer l'aire du carré ABCD.

d) Déterminer l'aire du quadrilatère A'B'C'D' en justifiant les calculs.

Exercice 3 : 7 points

ABC et DAC sont deux triangles rectangles avec AC = 10, BC = 8 et $\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$.



a) Démontrer que ces deux triangles sont semblables.
b) Calculer la longueur AB.
c) Calculer les longueurs AD et DC.
Conseil : les longueurs des côtés des triangles ABC et ADC sont deux à deux proportionnelles.
d) Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par la symétrie d'axe (BC).
Les triangles ABC et A'B'C' sont-ils égaux ? Justifier.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

NOM :	**Prénom :**

<u>**Compétences évaluées**</u>	A	B	C	D	E
Décomposer en produit de facteurs premiers et rendre une fraction irréductible.					
Utiliser les triangles égaux et semblables.					
Transformer un point ou une figure par homothétie.					
Démontrer.					

Exercice 1 : 6 points

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants : 20 196 et 226 512.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{226\,512}{20\,196}$.

c) Pour déterminer le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve tous les facteurs premiers en attribuant l'exposant le plus élevé aux facteurs premiers communs aux deux entiers.
En déduire le plus petit commun multiple à 20 196 et 226 512.

<u>**Exercice 2**</u> **:** 7 points

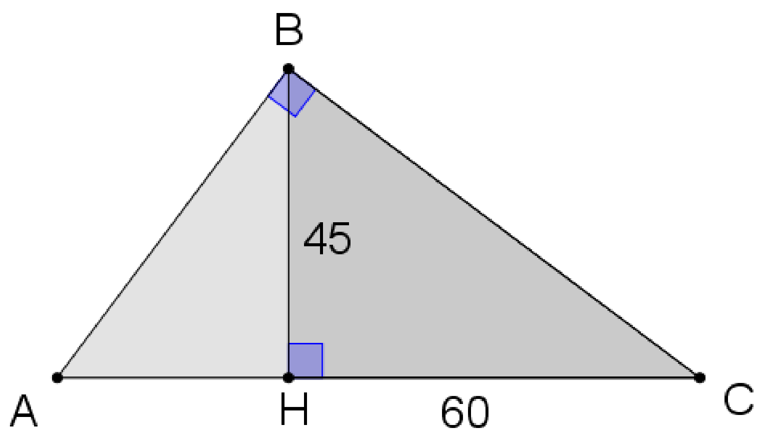
a) Construire un rectangle ABCD dont les dimensions sont AB = 3 cm et BC = 6 cm.
Placer un point O à l'extérieur du rectangle.
Construire l'image A'B'C'D' du rectangle ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$.
Faire apparaitre les traits de constructions en pointillés.

b) Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ? Justifier

c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.

d) Déterminer l'aire du quadrilatère A'B'C'D' en justifiant les calculs.

Exercice 3 : 7 points



Le triangle ABC est rectangle en B.
[BH] est la hauteur issue de B.

a) Calculer la longueur BC.
b) Démontrer que les triangles ABC et BHC sont semblables.
c) Calculer le périmètre du triangle ABC.
   Conseil : calcule les longueurs AB et AC en utilisant le fait que les longueurs des côtés des triangles ABC et BHC sont deux à deux proportionnelles.
d) Construire l'image B'H'C' du triangle BHC par la symétrie de centre H.
   Les triangles BHC et B'H'C' sont-ils égaux ? Justifier.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 1 : (6 points)

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 18 200 et 269 500.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{18\ 200}{269\ 500}$.

c) Pour déterminer le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve tous les facteurs premiers en attribuant l'exposant le plus élevé aux facteurs premiers communs aux deux entiers.
En déduire le plus petit commun multiple à 18 200 et 269 500.

a) $18\ 200 = 2\times 9\ 100 = 2\times 2\times 4\ 550 = 2\times 2\times 2\times 2\ 275 = 2^3\times 5\times 455 = 2^3\times 5\times 5\times 91$
$18\ 200 = 2^3\times 5^2\times 7\times 13$

$269\ 500 = 2\times 134\ 750 = 2\times 2\times 67\ 375 = 2^2\times 5\times 13\ 475 = 2^2\times 5\times 5\times 2\ 695$
$269\ 500 = 2^2\times 5\times 5\times 5\times 539 = 2^2\times 5^3\times 7\times 77 = 2^2\times 5^3\times 7\times 7\times 11$
$269\ 500 = 2^2\times 5^3\times 7^2\times 11$

b) $\frac{18\ 200}{269\ 500} = \frac{2^3\times 5^2\times 7\times 13}{2^2\times 5^3\times 7^2\times 11} = \frac{2\times 13}{5\times 7\times 11} = \frac{26}{385}$

c) Le Plus Petit Commun Multiple à 18 200 et 269 500 est :
$2^3\times 5^3\times 7^2\times 11\times 13 = 7\ 007\ 000$

Exercice 2 : 7 points

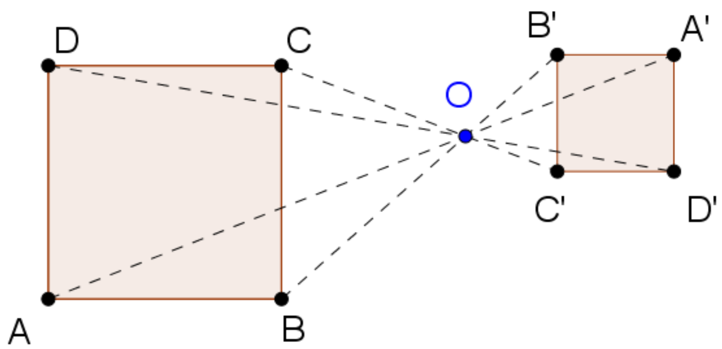
a) Construire un carré ABCD de côté 3 cm.
Placer un point O à l'extérieur du carré.
Construire l'image A'B'C'D' du carré ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ? Justifier

c) Calculer l'aire du carré ABCD.

d) Déterminer l'aire du quadrilatère A'B'C'D' en justifiant les calculs.

a)



CORRECTION

b) L'image du segment [AB] par l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre O est le segment [A'B'] de longueur $\frac{AB}{2}$.

De même $A'D' = \frac{AD}{2}$ et $C'D' = \frac{CD}{2}$ et $B'C' = \frac{BC}{2}$

Donc $A'B' = A'D' = C'D' = B'C'$

L'homothétie conservant les angles, on a :

$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 90°$

A'B'C'D' est un quadrilatère ayant un angle droit et ses côtés de même longueur :
A'B'C'D' est donc un carré.

c) $Aire(ABCD) = AB^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$

d) $Aire(A'B'C'D') = A'B'^2$

Or $A'B' = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$

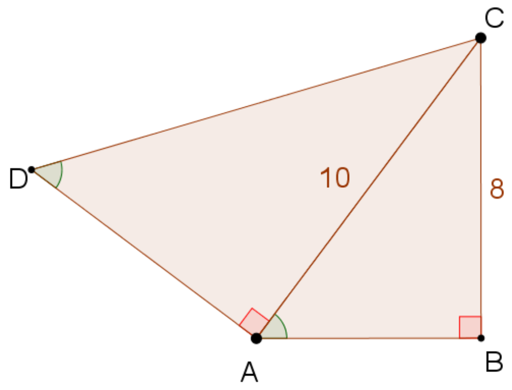
Donc $Aire(A'B'C'D') = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ cm}^2$.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 3 : 7 points

ABC et DAC sont deux triangles rectangles avec AC = 10, BC = 8 et $\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$.



a) Démontrer que ces deux triangles sont semblables.
b) Calculer la longueur AB.
c) Calculer les longueurs AD et DC.
Conseil : les longueurs des côtés des triangles ABC et ADC sont deux à deux proportionnelles.
d) Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par la symétrie d'axe (BC).
Les triangles ABC et A'B'C' sont-ils égaux ? Justifier.

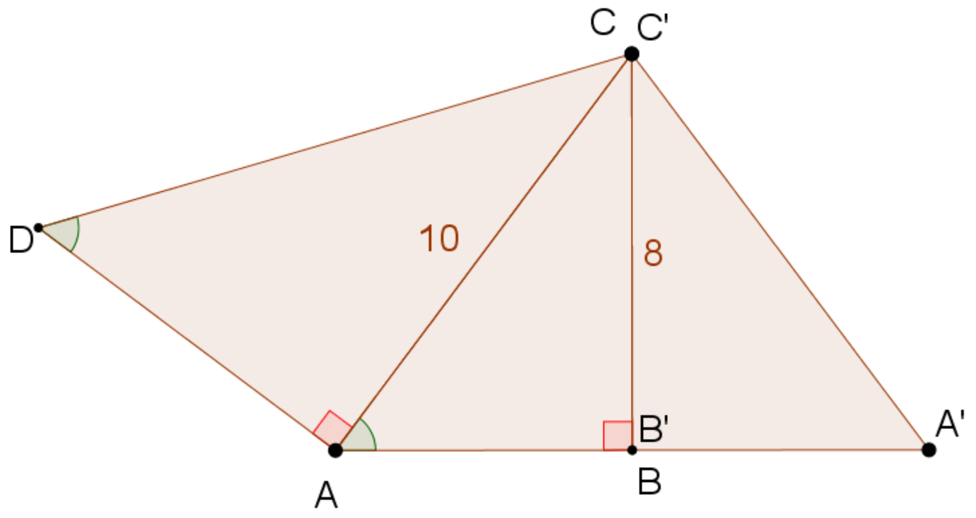
a) Les triangles ABC et DAC ayant deux angles deux à deux de même mesure ($\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = 90°$ et $\widehat{ADC} = \widehat{BAC}$) sont donc semblables.

b) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
Soit : $10^2 = AB^2 + 8^2$
Donc $AB^2 = 100 - 64 = 36 = 6^2$
Donc AB = 6

c) Les triangles ABC et DAC étant semblables ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles :
$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB}$$
Soit : $\frac{CD}{10} = \frac{10}{8} = \frac{AD}{6}$
Donc $8 \times CD = 10 \times 10$ et $8 \times AD = 10 \times 6$
Soit $CD = \frac{100}{8} = 12{,}5$ et $AD = \frac{10 \times 6}{8} = \frac{60}{8} = 7{,}5$

CORRECTION

d)



La symétrie axiale conserve les longueurs. Donc les triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés deux à deux de même longueur.
Donc les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 1 : (6 points)

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants : 20 196 et 226 512.

b) En déduire la simplification de la fraction $\dfrac{226\,512}{20\,196}$.

c) Pour déterminer le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve tous les facteurs premiers en attribuant l'exposant le plus élevé aux facteurs premiers communs aux deux entiers.
En déduire le plus petit commun multiple à 20 196 et 226 512.

a) $20\,196 = 2\times10\,098 = 2\times2\times5\,049 = 2^2\times3\times1\,683 = 2^2\times3\times3\times561 = 2^2\times3\times3\times3\times187$
$20\,196 = 2^2\times3^3\times11\times17$

$226\,512 = 2\times113\,256 = 2\times2\times56\,628 = 2\times2\times2\times28314 = 2\times2\times2\times2\times14\,157$
$226\,512 = 2^4\times3\times4719 = 2^4\times3\times3\times1\,573 = 2^4\times3^2\times11\times143 = 2^4\times3^2\times11\times11\times13$
$226\,512 = 2^4\times3^2\times11^2\times13$

b) $\dfrac{226\,512}{20\,196} = \dfrac{2^4\times3^2\times11^2\times13}{2^2\times3^3\times11\times17} = \dfrac{2^2\times11\times13}{3\times17} = \dfrac{572}{51}$

c) Le Plus Petit Commun Multiple à 20 196 et 226 512 est :
$2^4\times3^3\times11^2\times13\times17 = 11\,552\,112$

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 2 : 7 points

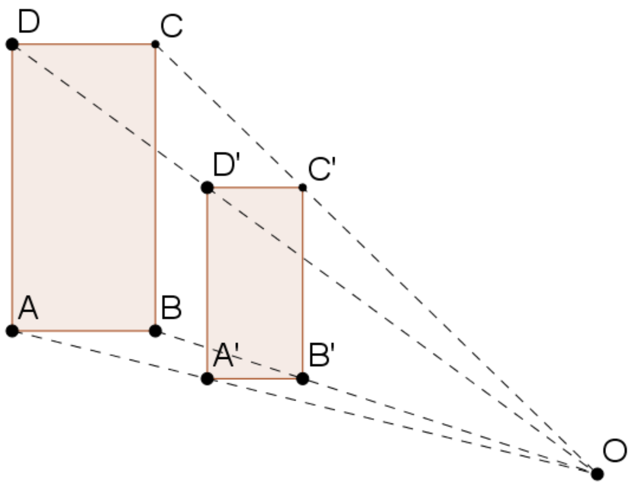
a) Construire un rectangle ABCD dont les dimensions sont AB = 3 cm et BC = 6 cm.
Placer un point O à l'extérieur du rectangle.
Construire l'image A'B'C'D' du rectangle ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$.
Faire apparaitre les traits de constructions en pointillés.

b) Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ? Justifier

c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.

d) Déterminer l'aire du quadrilatère A'B'C'D' en justifiant les calculs.

a)



b) L'image du segment [AB] par l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ et de centre O est le segment [A'B'] de longueur $\frac{2}{3}\times AB$.

De même $A'D' = \frac{2}{3}\times AD$ et $C'D' = \frac{2}{3}\times CD$ et $B'C' = \frac{2}{3}\times BC$

Donc $A'B' = D'C' = \frac{2}{3}\times 3 = 2$ cm et $B'C' = A'D' = \frac{2}{3}\times 6 = 4$ cm

L'homothétie conservant les angles, on a :

$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 90°$

A'B'C'D' étant un quadrilatère ayant ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme.

De plus comme $\widehat{A'B'C'} = 90°$ alors A'B'C'D' est donc un rectangle.

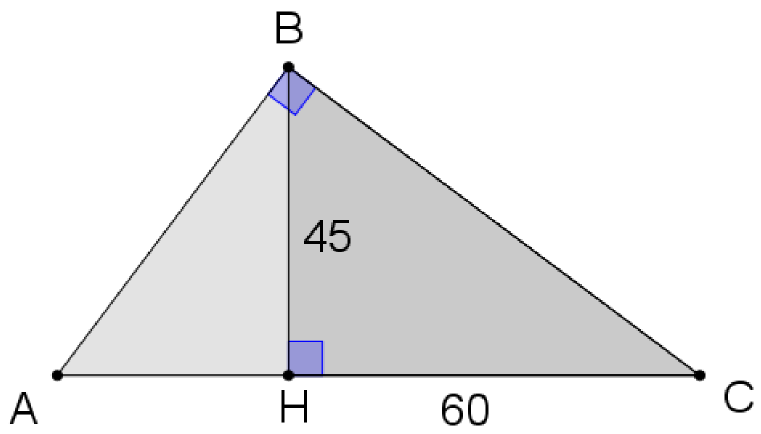
c) $\text{Aire}(ABCD) = AB\times BC = 3\times 6 = 18 \text{ cm}^2$

d) $\text{Aire}(A'B'C'D') = A'B'\times B'C' = 2\times 4 = 8 \text{ cm}^2$

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 3 : 7 points



Le triangle ABC est rectangle en B.
[BH] est la hauteur issue de B.

a) Calculer la longueur BC.
b) Démontrer que les triangles ABC et BHC sont semblables.
c) Calculer le périmètre du triangle ABC.
Conseil : calcule les longueurs AB et AC en utilisant le fait que les longueurs des côtés des triangles ABC et BHC sont deux à deux proportionnelles.
d) Construire l'image B'H'C' du triangle BHC par la symétrie de centre H.
Les triangles BHC et B'H'C' sont-ils égaux ? Justifier.

a) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle BHC rectangle en H :
$BC^2 = BH^2 + HC^2$
Soit $BC^2 = 45^2 + 60^2 = 2025 + 3600 = 5625 = 75^2$
Donc BC = 75

b) Les triangles ABC et BHC ayant deux angles deux à deux de même mesure ($\widehat{ACB} = \widehat{HCB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BHC} = 90°$) sont semblables.

c) Les triangles semblables ABC et BHC ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles.

Donc : $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{HC} = \dfrac{AB}{BH}$

Soit : $\dfrac{AC}{75} = \dfrac{75}{60} = \dfrac{AB}{45}$

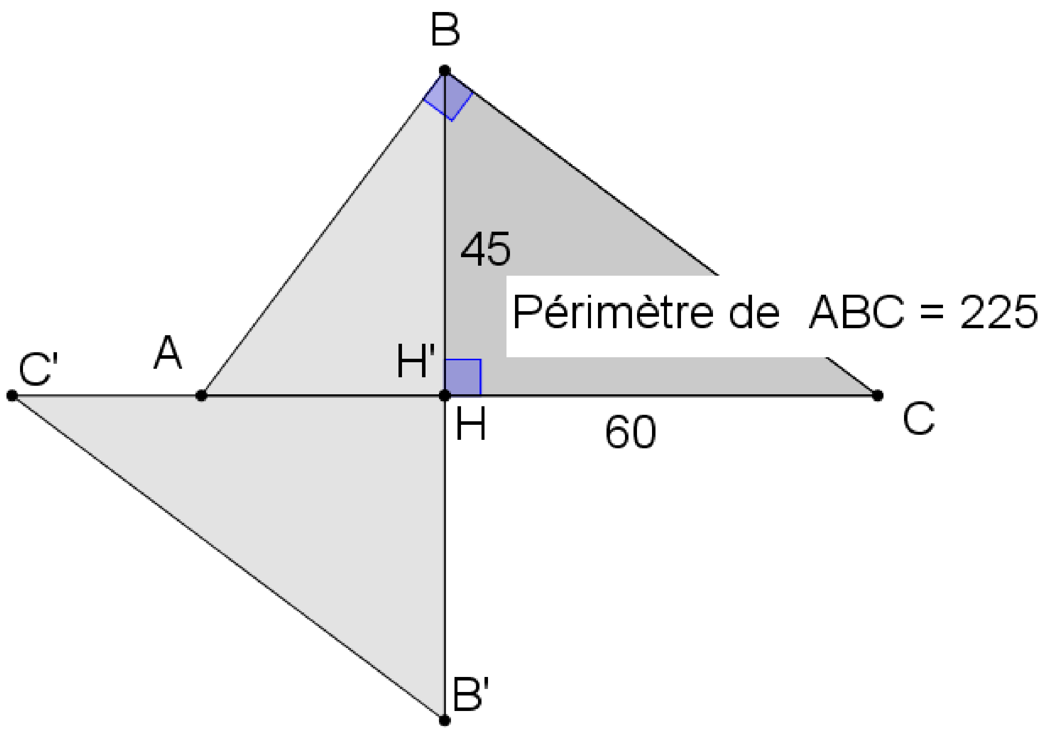
Donc $60 \times AC = 75 \times 75$ et $60 \times AB = 75 \times 45$

D'où : $AC = \dfrac{75 \times 75}{60} = 93{,}75$ et $AB = \dfrac{75 \times 45}{60} = 56{,}25$

Le périmètre du triangle ABC est : $AB + BC + AC = 56{,}25 + 75 + 93{,}75 = 225$

d)

CORRECTION



La symétrie centrale conserve les longueurs. Donc les triangles HBC et H'B'C' ont leurs côtés deux à deux de même longueur.
Donc les triangles BHC et B'H'C' sont égaux.