DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

NOM :	Prénom :

Compétences évaluées	A	B	C	D	E
Décomposer en produit de facteurs premiers et rendre une fraction irréductible.					
Utiliser les triangles égaux et semblables.					
Transformer un point ou une figure par homothétie.					
Démontrer.					

Exercice 1 : (4 points)

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 60 984 et 58 212.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{60\,984}{58\,212}$.

c) Pour déterminer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve seulement les facteurs en commun avec le plus petit exposant.
En déduire le plus grand commun diviseur à 60 984 et 58 212.

Exercice 2 : (6 points)

a) ABC est un triangle rectangle en A avec AB = 4 cm et BC = 5 cm.
Calculer la longueur AC.

b) Construire ce triangle ABC.
Placer un point O à l'extérieur du triangle ABC.
Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.
On fera apparaitre les traits de constructions en pointillés.

c) Calculer les longueurs des côtés du triangle A'B'C'.

d) Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Justifier

Exercice 3 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme, N est un point du segment [DC] distinct de D et C.
La droite (AN) coupe (BC) en M.

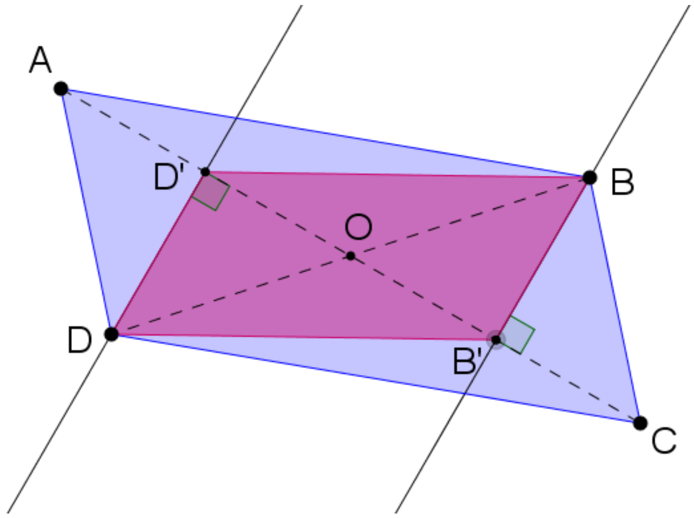
a) Faire une figure.

b) Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.

c) Démontrer que les triangles ABM et MNC sont des triangles semblables.

Exercice 4 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme de centre O.
La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (AC) en B'.
La perpendiculaire à (AC) passant par D coupe (AC) en D'.



a) Démontrer que les angles $\widehat{OBB'}$ et $\widehat{ODD'}$ sont de même mesure.
b) Démontrer que les triangles OBB' et ODD' sont égaux.
c) En déduire que O est le milieu de [B'D'].
d) En déduire la nature du quadrilatère BB'DD'.

3ème C **Sujet 2 2016-2017**

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

NOM :	**Prénom :**

Compétences évaluées	A	B	C	D	E
Décomposer en produit de facteurs premiers et rendre une fraction irréductible.					
Utiliser les triangles égaux et semblables.					
Transformer un point ou une figure par homothétie.					
Démontrer.					

Exercice 1 : (4 points)

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants :
1 769 625 et 13 803 075.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{1\,769\,625}{13\,803\,075}$.

c) Pour déterminer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve seulement les facteurs en commun avec le plus petit exposant.
En déduire le plus grand commun diviseur à 1 769 625 et 13 803 075.

Exercice 2 : (6 points)

a) ABC est un triangle avec AB = 5 cm, AC = 12 cm et BC = 13 cm.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

b) Construire ce triangle ABC.
Placer un point O à l'extérieur du triangle ABC.
Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{4}$.
On fera apparaitre les traits de constructions en pointillés.

c) Les triangles ABC et A'B'C' sont-ils semblables ? Justifier la réponse.

d) Calculer en justifiant les aires des triangles ABC et A'B'C'?

Exercice 3 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme, M est un point du segment [AB] distinct de A et B.
La droite (CM) coupe (AD) en N.

a) Faire une figure.

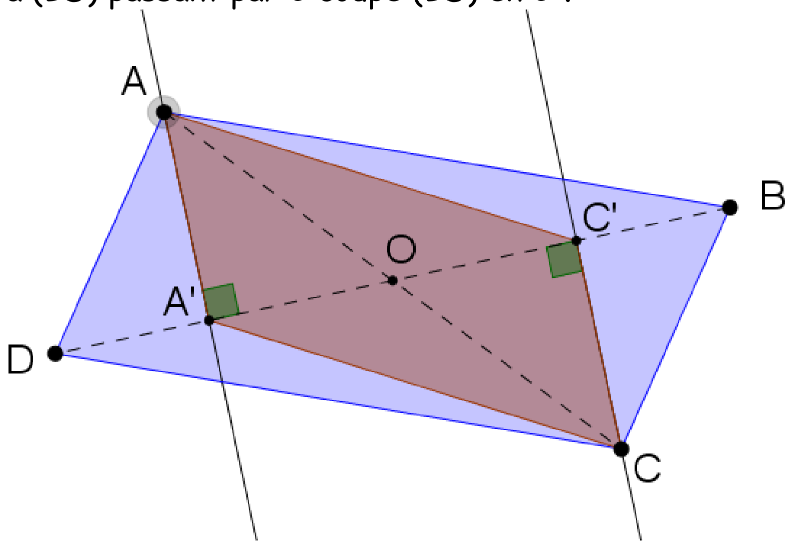
b) Démontrer que les triangles AMN et BCM sont des triangles semblables.

c) Démontrer que les triangles AMN et DNC sont des triangles semblables.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

Exercice 4 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme de centre O.
La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe (BD) en A'.
La perpendiculaire à (BD) passant par C coupe (BD) en C'.



a) Démontrer que les angles $\widehat{OAA'}$ et $\widehat{OCC'}$ sont de même mesure.
b) Démontrer que les triangles OAA' et OCC' sont égaux.
c) En déduire que O est le milieu de [A'C'].
d) En déduire la nature du quadrilatère AA'CC'.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 1 : (4 points)

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 60 984 et 58 212.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{60\,984}{58\,212}$.

c) Pour déterminer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve seulement les facteurs en commun avec le plus petit exposant.
En déduire le plus grand commun diviseur à 60 984 et 58 212.

a) $60\,984 = 2\times30\,492 = 2\times2\times15\,246 = 2\times2\times2\times7\,623 = 2^3\times3\times2\,541 = 2^3\times3\times3\times847$
$60\,984 = 2^3\times3^2\times7\times121 = 2^3\times3^2\times7\times11\times11$
$60\,984 = 2^3\times3^2\times7\times11^2$

$58\,212 = 2\times29\,106 = 2\times2\times14\,553 = 2^2\times3\times4\,851 = 2^2\times3\times3\times1\,617 = 2^2\times3\times3\times3\times569$
$58\,212 = 2^2\times3^3\times7\times77 = 2^2\times3^3\times7\times7\times11$
$58\,212 = 2^2\times3^3\times7^2\times11$

b) $\frac{60\,984}{58\,212} = \frac{2^3\times3^2\times7\times11^2}{2^2\times3^3\times7^2\times11} = \frac{2\times11}{3\times7} = \frac{22}{21}$

c) Le Plus Grand Commun Diviseur à 60 984 et 58 212 est : $2^2\times3^2\times7\times11 = 2\,772$

Exercice 2 : (6 points)

a) ABC est un triangle rectangle en A avec AB = 4 cm et BC = 5 cm.
Calculer la longueur AC.

b) Construire ce triangle ABC.
Placer un point O à l'extérieur du triangle ABC.
Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.
On fera apparaitre les traits de constructions en pointillés.

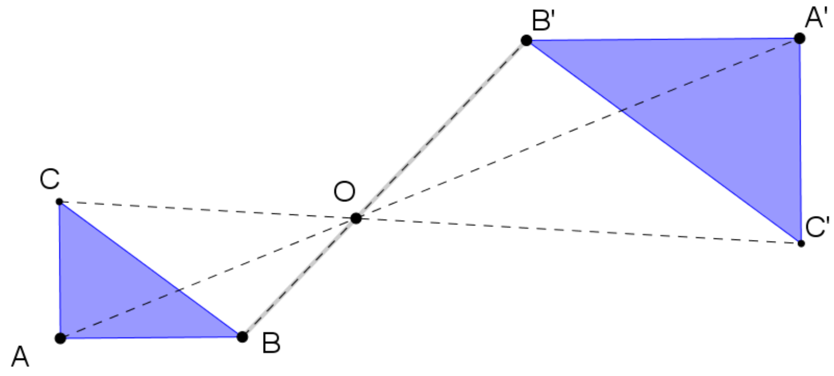
c) Calculer les longueurs des côtés du triangle A'B'C'.

d) Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Justifier

a) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Soit : $5^2 = 4^2 + AC^2$
D'où : $AC^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$
Donc AC = 3 cm

CORRECTION

b)



c) Par une homothétie de rapport $-\frac{3}{2}$, l'image d'un segment est un segment dont la longueur est multipliée par $\frac{3}{2}$.

Donc $A'B' = \frac{3}{2} \times AB = \frac{3}{2} \times 4 = 6$ cm

$A'C' = \frac{3}{2} \times AC = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4,5$ cm

$B'C' = \frac{3}{2} \times BC = \frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2} = 7,5$ cm

d) $B'C'^2 = 7,5^2 = 56,25$

$A'B'^2 + A'C'^2 = 6^2 + 4,5^2 = 36 + 20,25 = 56,25$

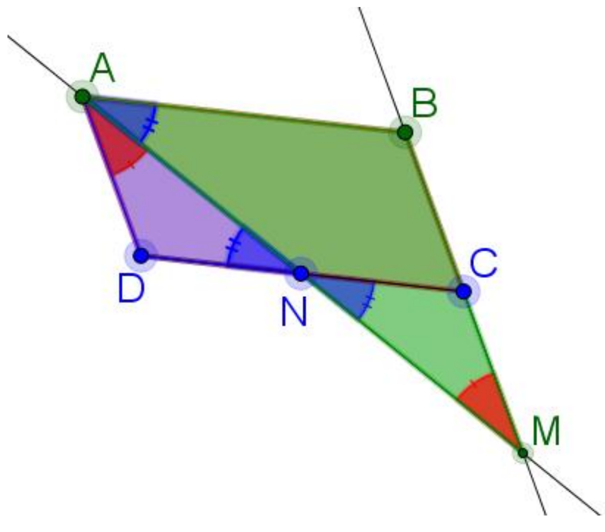
L'égalité de Pythagore $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$ étant vérifiée le triangle A'B'C' est rectangle en A'.

Exercice 3 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme, N est un point du segment [DC] distinct de D et C.
La droite (AN) coupe (BC) en M.

a) Faire une figure.
b) Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
c) Démontrer que les triangles ABM et MNC sont des triangles semblables.

a)



CORRECTION

b) Les côtés opposés [AB] et [CD] du parallélogramme ABCD sont parallèles.

Les angles alternes-internes $\widehat{DAN}$ et $\widehat{CMN}$ déterminés par les droites parallèles (AB) et (CD) et la sécante (AN) sont de même mesure.

Les angles alternes-internes $\widehat{BAN}$ et $\widehat{AND}$ déterminés par les droites parallèles (AB) et (CD) et la sécante (AM) sont de même mesure.

Les triangles ADN et ABM ayant deux angles deux à deux de même mesure ($\widehat{DAN} = \widehat{CMN}$ et $\widehat{BAN} = \widehat{AND}$) sont donc semblables.

c) Les triangles ABM et MCN ont un sommet en commun, donc $\widehat{AMB} = \widehat{NCM}$.

Les angles correspondants $\widehat{BAM}$ et $\widehat{CNM}$ déterminés par les droites parallèles (AB) et (CD) et la sécante (AM) sont de même mesure.

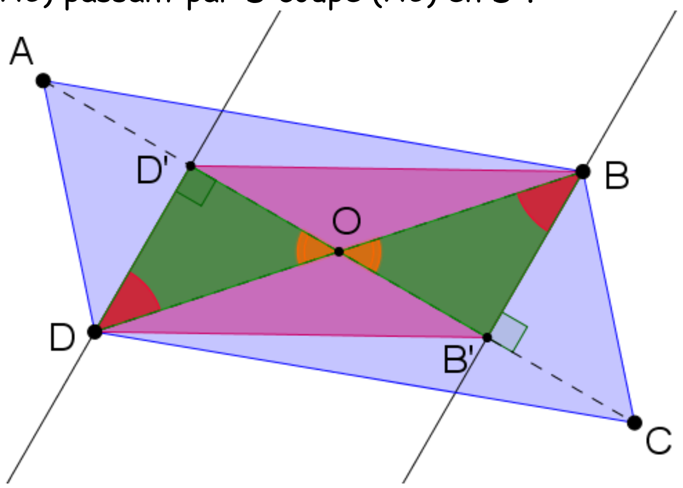
Les triangles ABM et MNC ayant deux angles deux à deux de même mesure ($\widehat{AMB} = \widehat{NCM}$ et $\widehat{BAM} = \widehat{CNM}$) sont donc semblables.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 4 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme de centre O.
La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (AC) en B'.
La perpendiculaire à (AC) passant par D coupe (AC) en D'.



a) Démontrer que les angles $\widehat{OBB'}$ et $\widehat{ODD'}$ sont de même mesure.
b) Démontrer que les triangles OBB' et ODD' sont égaux.
c) En déduire que O est le milieu de [B'D'].
d) En déduire la nature du quadrilatère BB'DD'.

a) Les droites (BB') et (DD') perpendiculaires à la droite (AC) sont parallèles.

Les angles alternes-internes $\widehat{OBB'}$ et $\widehat{ODD'}$ déterminés par les droites parallèles (BB') et (DD') et la sécante (BD) sont de même mesure.

b) Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en leur milieu O.
Donc O est le milieu du segment [BD].
Donc OB = OD.

Les angles $\widehat{DOD'}$ et $\widehat{BOB'}$ opposés par le sommet sont de même mesure.

Les triangles OBB' et ODD' ont un côté de même longueur (OB = OD), commun à deux angles de même mesure ($\widehat{OBB'} = \widehat{ODD'}$ et $\widehat{BOB'} = \widehat{DOD'}$) sont donc égaux.

c) Les triangles OBB' et ODD' étant égaux ont leurs côtés homologues de même longueur.
Donc en particulier, OB' = OD'.
Et comme les points O, B' et D' sont alignés, alors O est le milieu du segment [B'D'].

d) Les diagonales [BD] et [B'D'] du quadrilatère BB'DD' se coupent en leur milieu O.
Donc le quadrilatère BB'DD' est un parallélogramme.

DS1 nombres premiers – homothétie – triangles semblables et égaux

CORRECTION

Exercice 1 : (4 points)

a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants :
1 769 625 et 13 803 075.

b) En déduire la simplification de la fraction $\frac{1\,769\,625}{13\,803\,075}$.

c) Pour déterminer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) à deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers, on procède comme suit :
On conserve seulement les facteurs en commun avec le plus petit exposant.
En déduire le plus grand commun diviseur à 1 769 625 et 13 803 075.

a) $1\,769\,625 = 3\times 589\,875 = 3\times3\times 196\,625 = 3^2\times5\times3\,9325 = 3^2\times5\times5\times7\,865$
$1\,769\,625 = 3^2\times5\times5\times5\times1\,573 = 3^2\times5^3\times11\times143 = 3^2\times5^3\times11\times11\times13$
$1\,769\,625 = 3^2\times5^3\times11^2\times13$

$13\,803\,075 = 3\times 4\,601\,025 = 3\times3\times 1\,533\,675 = 3\times3\times3\times 511\,225 = 3^3\times5\times 102\,245$
$13\,803\,075 = 3^3\times5\times5\times 20\,449 = 3^3\times5^2\times11\times 1\,859 = 3^3\times5^2\times11\times11\times169$
$13\,803\,075 = 3^3\times5^2\times11^2\times13^2$

b) $\frac{1\,769\,625}{13\,803\,075} = \frac{3^2\times5^3\times11^2\times13}{3^3\times5^2\times11^2\times13^2} = \frac{5}{3\times13} = \frac{5}{39}$

c) Le Plus Grand Commun Diviseur à 1 769 625 et 13 803 075 est :
$3^2\times5^2\times11^2\times13 = 353\,925$

Exercice 2 : (6 points)

a) ABC est un triangle avec AB = 5 cm, AC = 12 cm et BC = 13 cm.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

b) Construire ce triangle ABC.
Placer un point O à l'extérieur du triangle ABC.
Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{4}$.
On fera apparaitre les traits de constructions en pointillés.

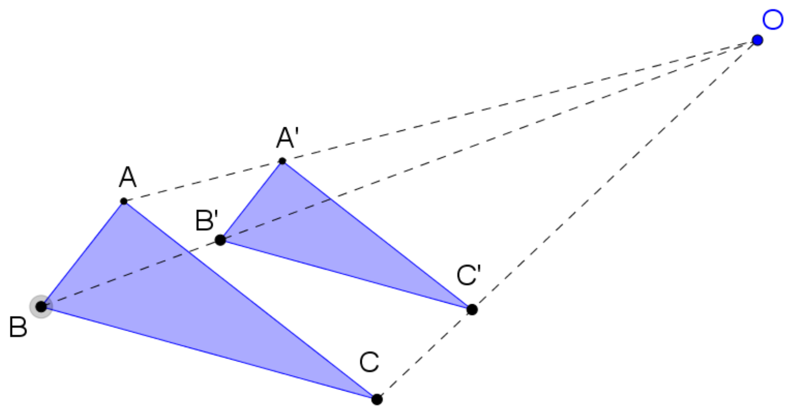
c) Les triangles ABC et A'B'C' sont-ils semblables ? Justifier la réponse.

d) Calculer en justifiant les aires des triangles ABC et A'B'C'?

a) $BC^2 = 13^2 = 169$
$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
L'égalité de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$ étant vérifiée, le triangle ABC est rectangle en A.

CORRECTION

b)



c) L'image d'un segment par une homothétie de rapport $\frac{3}{4}$ est un segment dont la longueur est multipliée par $\frac{3}{4}$.

Donc $A'B' = \frac{3}{4} \times AB$ et $A'C' = \frac{3}{4} \times AC$ et $B'C' = \frac{3}{4} \times BC$

Donc les longueurs des côtés des triangles ABC et A'B'C' sont deux à deux proportionnelles.

Donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

d) $\text{Aire}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$

Aire de A'B'C' :

$1^{ère}$ méthode :

Par une homothétie de rapport $\frac{3}{4}$, l'image d'un segment est un segment dont la longueur est multipliée par $\frac{3}{4}$.

Donc $A'B' = \frac{3}{4} \times AB = \frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3{,}75$ cm

$A'C' = \frac{3}{4} \times AC = \frac{3}{4} \times 12 = 9$ cm

$B'C' = \frac{3}{4} \times BC = \frac{3}{4} \times 13 = \frac{39}{4} = 9{,}75$ cm

$B'C'^2 = 9{,}75^2 = 95{,}0625$

$A'B'^2 + A'C'^2 = 3{,}75^2 + 9^2 = 14{,}0625 + 81\ 95{,}0625$

L'égalité de Pythagore $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$ étant vérifiée le triangle A'B'C' est rectangle en A'.

Donc Aire(A'B'C') = $\dfrac{A'B' \times A'C'}{2} = \dfrac{3{,}75 \times 9}{2} = 16{,}875 \text{ cm}^2$

$2^{ème}$ méthode :

L'aire de l'image d'une figure par une homothétie de rapport $\dfrac{3}{4}$ est multipliée par

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16} = 0{,}5625$

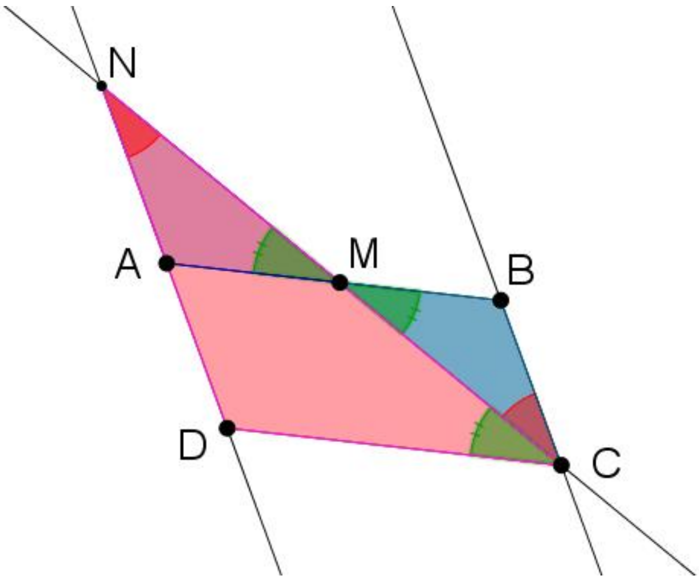
Donc Aire(A'B'C') = $0{,}5625 \times 30 = 16{,}875 \text{ cm}^2$

Exercice 3 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme, M est un point du segment [AB] distinct de A et B.
La droite (CM) coupe (AD) en N.

d) Faire une figure.
e) Démontrer que les triangles AMN et BCM sont des triangles semblables.
f) Démontrer que les triangles AMN et DNC sont des triangles semblables.

a)



b) Les côtés opposés [AB] et [CD] du parallélogramme ABCD sont parallèles.

Les angles alternes-internes $\widehat{ANM}$ et $\widehat{BCM}$ déterminés par les droites parallèles (AB) et (CD) et la sécante (CN) sont de même mesure.

Les angles opposés par le sommet $\widehat{AMN}$ et $\widehat{BMC}$ sont de même mesure.

Les triangles AMN et BCM ayant deux angles deux à deux de même mesure ($\widehat{ANM} = \widehat{BCM}$ et $\widehat{AMN} = \widehat{BMC}$) sont donc semblables.

c) Les triangles AMN et BCM ont un sommet en commun N, donc $\widehat{ANM} = \widehat{DNC}$.

Les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{DCN}$ déterminés par les droites parallèles

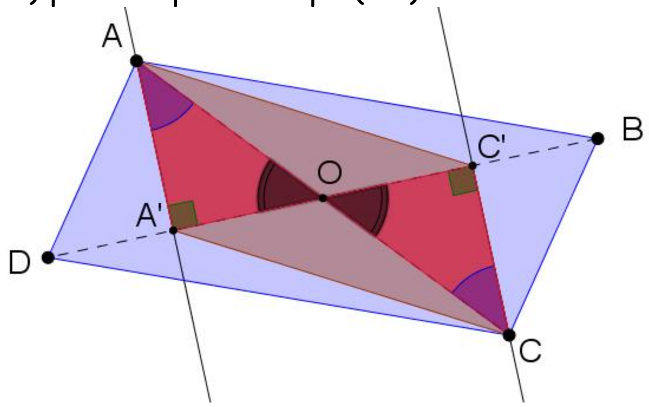
CORRECTION

(AB) et (CD) et la sécante (NC) sont de même mesure.

Les triangles AMN et BCM ayant deux angles deux à deux de même mesure ($\widehat{ANM} = \widehat{DNC}$ et $\widehat{AMN} = \widehat{DCN}$) sont donc semblables.

Exercice 4 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme de centre O.
La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe (BD) en A'.
La perpendiculaire à (BD) passant par C coupe (BD) en C'.



a) Démontrer que les angles $\widehat{OAA'}$ et $\widehat{OCC'}$ sont de même mesure.
b) Démontrer que les triangles OAA' et OCC' sont égaux.
c) En déduire que O est le milieu de [A'C'].
d) En déduire la nature du quadrilatère AA'CC'.

a) Les droites (AA') et (CC') perpendiculaires à la droite (BD) sont parallèles.
Les angles alternes-internes $\widehat{OAA'}$ et $\widehat{OCC'}$ déterminés par les droites parallèles (AA') et (CC') et la sécante (AC) sont de même mesure.

b) Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en leur milieu O.
Donc O est le milieu du segment [AC].
Donc OA = OC.
Les angles $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{COC'}$ opposés par le sommet sont de même mesure.

Les triangles OAA' et OCC' ont un côté de même longueur (OA = OC), commun à deux angles de même mesure ($\widehat{OAA'} = \widehat{OCC'}$ et $\widehat{AOA'} = \widehat{COC'}$) sont donc égaux.

c) Les triangles OAA' et OCC' étant égaux ont leurs côtés homologues de même longueur.
Donc en particulier, OA' = OC'.
Et comme les points O, A' et C' sont alignés, alors O est le milieu du segment [A'C'].

d) Les diagonales [AC] et [A'C'] du quadrilatère AA'CC' se coupent en leur milieu O.
Donc le quadrilatère AA'CC' est un parallélogramme.