TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

Partie 1 : Existence et unicité de la solution

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Etudions le signe de f'(x).

$\Delta = (-4)^2 - 4\times3\times2 = 16 - 24 = -8 < 0$

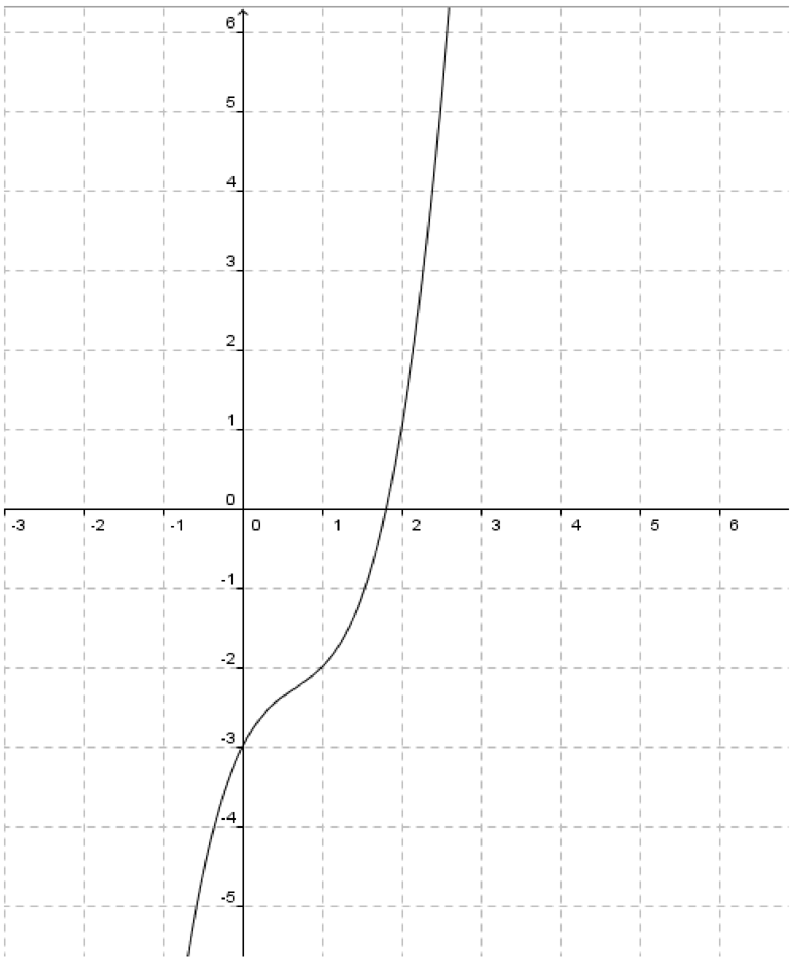
Donc $f'(x) > 0$ (car $3 > 0$) pour tout x réel.

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée x_0.

b) Tracé de la courbe représentant f avec Géogebra.



TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

On conjecture que $1 \leq x_0 \leq 2$

$f(1) = 1 - 2 + 2 - 3 = -2$ et $f(2) = 2^3 - 2\times2^2 + 2\times2 - 3 = 1$

$f(1) < 0$ et $f(2) > 1$ et f est strictement croissante sur $[1 ;2]$.

Donc on a bien $x_0 \in [1 ;2]$.

Partie 2 : Algorithme de balayage

1) a) La condition $f(a)f(x) > 0$ est vérifiée si $f(a)$ et $f(x)$ sont de même signe.

La condition de sortie de la boucle tant que est donc que $f(a)$ et $f(x)$ soient de signes différents.

b) La ligne $x = x + h$ permet de balayer l'intervalle $[a ;b]$ avec un pas de longueur h.

c) Quand le programme sort de la boucle Tant Que, on a $f(a)f(x) \leq 0$ et $f(a)f(x - h) > 0$

Pour la fonction étudiée, $f(a) < 0$ et $f(x) \geq 0$ et $f(x - h) < 0$

On a donc un encadrement de longueur h de x_0 : $x - h \leq x_0 < x$.

2) a) <u>**Programme TI 82-83-84**</u> :

```
PROGRAM:BALAYAGE
:Input A
:Input H
:A→X
:Y1→F
:1→C
:While F*Y1>0
:X+H→X
:C+1→C
:End
:Disp X-H
:Disp X
:Disp C
```

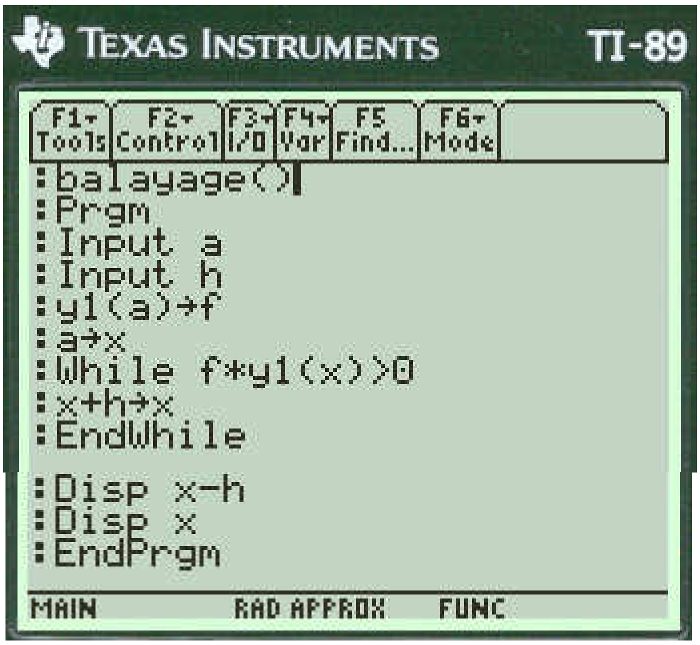
TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

Programme TI-NSPIRE :

```
Define balayage()=
Prgm
:Local a,h,f
:Request "a ",a
:Request "h ",h
:f:=f1(a)
:x:=a
:While f*f1(x)>0
:  x:=x+h
:EndWhile
:Disp "borne inf de x0 :",x-h
:Disp "borne sup de x0 :",x
:EndPrgm
```

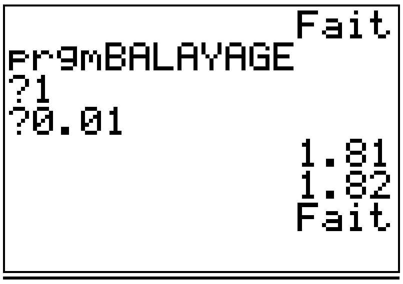
Programme TI-89 :



TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

<u>Test avec a = 1 et h = 0,01</u>



Encadrement : $1{,}81 < x_0 < 1{,}82$

b) Nombre de calculs f(x) : $\dfrac{0{,}82}{0{,}01} + 1 = 83$

TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

Partie 3 : Algorithme de dichotomie

1) a) Centre de [1 ;2] : 1,5

$f(1,5) = -1,125 < 0$

Donc $1,5 \leq x_0 \leq 2$: encadrement d'amplitude 0,5.

b) Centre de [1,5 ;2] : 1,75

$f(1,75) = -0.265625 < 0$

Donc $1,75 \leq x_0 \leq 2$: encadrement d'amplitude 0,25.

Centre de [1,75 ;2] : 1,875

$f(1,875) = 0,310546875 > 0$

Donc $1,75 \leq x_0 \leq 1,875$: encadrement d'amplitude 0,125.

c)

	a	b	$\frac{a+b}{2}$	Signe de $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
Initialisation	1	2	1,5	+
Etape 1	1,5	2	1,75	+
Etape 2	1,75	2	1,875	-
Etape 3	1,75	1,875	1,8125	-

d) A chaque étape, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2.

Au bout de n étapes, l'amplitude de l'encadrement est $\frac{1}{2^n}$.

Cette méthode permet effectivement d'obtenir un encadrement d'amplitude aussi petite que l'on veut.

TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

2) a) Algorithme :

Saisir (a,b,h)
Tant que $\|b - a)\| > h$ faire
Si $f(a)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ alors
$a = \dfrac{a+b}{2}$
Sinon
$b = \dfrac{a+b}{2}$
FinSi
FinTantQue
Afficher $a \leq x_0 \leq b$

b)

<u>Programme TI 82-83-84</u> :

```
PROGRAM:DICHOTOM
:Input A
:Input B
:Input H
:While abs(B-A)>
H
:(A+B)/2→M
:A→X
:Y1→C
:M→X
:Y1→D
:If C*D>0
:Then
:M→A
:Else
:M→A
:Else
:M→B
:End
:End
:Disp A
:Disp B
```

TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

<u>Programme TI-NSPIRE</u> :

```
Define dichotomie()=
Prgm
:Local a,b,h
:Request "a",a
:Request "b",b
:Request "h",h
:setMode(5,2)
:While abs(b-a)≥h
:If f1(a)*f1(((a+b)/(2)))>0 Then
:a:=((a+b)/(2))
:Else
:b:=((a+b)/(2))
:EndIf
:EndWhile
:Disp "borne inf : ",a
:Disp "borne sup : ",b
:EndPrgm
```

<u>Programme TI-89</u> :

TP1 p 110 : Symbole Belin 2012

CORRECTION

Test du programme avec a = 1, b = 2 et h = 0,01 (pgm TI-NSPIRE)

```
dichotomie()
a 1
b 2
h 0.001
borne inf :  1.80957
borne sup :  1.81055
                                    Terminé
```

c) $\frac{1}{2^n} < 0,01 \Rightarrow n > 6$

Le nombre de calculs f(x) est donc $2 \times 7 = 14$ à comparer aux 63 calculs pour la méthode par balayage.

La méthode par dichotomie est donc en moyenne meilleure que la méthode par balayage.