**Première L**

# COMPOSITION DE MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE

**2ème trimestre 2010**

**Durée de l'épreuve : 1 h 30**

**Le candidat doit traiter les 3 exercices**
**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des justifications entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte 4 pages, y compris celle-ci.

**Exercice 1** (2 points)

Le prix d'un vêtement augmente de 4% en 2007, de 2% en 2008 et de 6% en 2009.

1) Quel est le pourcentage d'augmentation du prix de ce vêtement de 2006 à 2009 ?
2) Quel est le pourcentage moyen annuel d'augmentation du prix de ce vêtement de 2006 à 2009 ?
   On donnera les résultats à 0,1% près.

**Exercice 2** (11 points)

Pierre achète sa première voiture et se préoccupe de l'assurer. Il a entendu dire que s'il n'est pas responsable d'aucun sinistre, sa prime d'assurance diminuera chaque année.
Il sait aussi que le pourcentage maximal de réduction est limité à 50% (on dit que le bonus maximal est de 50%).
En conséquence, la prime réduite ne peut être inférieure à la moitié de la prime « plein tarif ».

**Partie A** (4 points)

Dans un premier temps, Pierre « imagine » qu'à partir d'une prime initiale de 450 €, sa prime pourrait diminuer de 20 € chaque année. Il se sait conducteur prudent et suppose donc qu'il ne sera responsable d'aucun sinistre.

1) On note $u_n$ le montant, en euros, de sa prime d'assurance après n années sans sinistre. Ainsi $u_0 = 450$, $u_1 = 430$.
   Calculer $u_2$ et $u_3$.
2) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
3) Exprimer $u_n$ est fonction de n.
4) Combien d'années Pierre doit-il attendre, pour atteindre le bonus maximal, c'est-à-dire pour que sa prime soit égale à la moitié de sa prime initiale ?

**Partie B** (7 points)

Pierre trouve qu'il doit attendre bien longtemps, et pense qu'il se trompe dans son mode de calcul.
Il s'adresse alors à un assureur, qui lui explique qu'en réalité, s'il n'est responsable d'aucun sinistre, sa prime d'assurance diminuera de 5% chaque année (on dira que le bonus annuel est de 5%).
Dans les questions **1.** et 4. qui suivent, les résultats seront arrondis, si nécessaires, au centime d'euro. On note $v_n$ le montant, en euros, de sa prime d'assurance, après n années sans sinistre. Ainsi $v_0 = 450$.

1) Calculer $v_1$, $v_2$, $v_3$.

2) Quelle la nature de la suite $(v_n)$ ?
3) Exprimer $v_n$ est fonction de n.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | n | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | | $v_n$ | 450,00 € | | | |
| 4 | | $v_n - v_{n-1}$ | | | | |

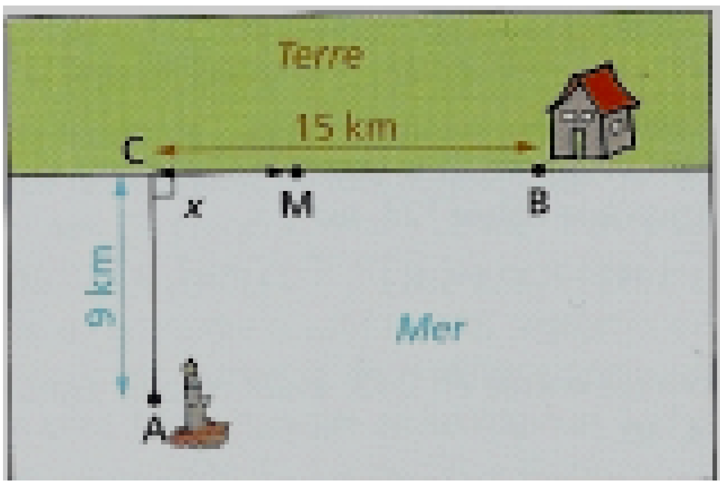
4) La copie d'écran ci-dessus est celle d'un tableur :
   a) Dans les cellules D3 et D4, quelles formules doit-on saisir pour les recopier vers la droite, afin de remplir ce tableau ?
   b) Recopier et remplir le tableau à l'aide de votre calculatrice.
   c) Interpréter le contenu de la cellule F4.

5) Combien d'années Pierre doit-il attendre pour atteindre le bonus maximal ? Préciser la méthode de calcul choisie.

**Exercice 3** (9 points)

Le gardien du phare, entouré d'eau et situé en A, souhaite rejoindre la maison côtière située en B.

$v_1$



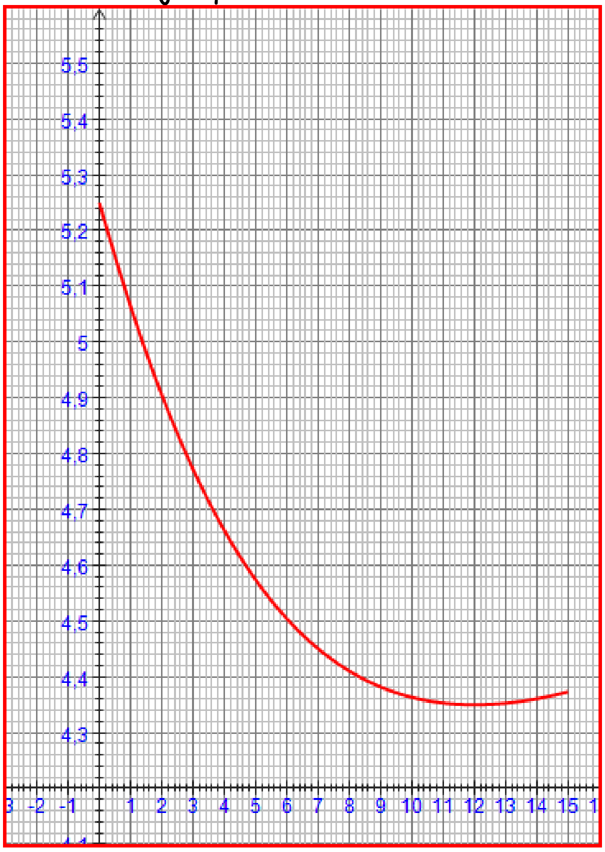

Il a à sa disposition un canot avec lequel il peut se déplacer à 4 km à l'heure ou il peut marcher à pied à 5 km à l'heure.

**Partie A** (3 points)

1) Le gardien décide de parcourir la distance AC en canot, puis la distance CB le long de la côte à pied.
   Calculer la durée en heures et minutes nécessaire pour effectuer cet itinéraire.
2) Le gardien décide de parcourir la distance AB en canot.
   a) Calculer AB en kilomètres.
   b) En déduire le temps de cet itinéraire en heures et minutes, arrondi à la minute.

**Partie B** (5 points + 1 points bonus)

Le gardien décide de rejoindre la terre M avec le canot, puis de marcher le long de la côte jusqu'en B.




La courbe ci-dessus est la représentation de la fonction qui à la distance CM en km associe la durée du parcours en heures. Cette fonction a pour ensemble de définition l'intervalle [0 ;15].

1) Vérifier sur le graphique le résultat de la question **A.1**.
   On expliquera la démarche.
2) Le gardien choisit l'itinéraire lui permettant d'aller le plus vite possible de A à B.
   a) En utilisant le graphique, répondre aux questions :
      A combien de kilomètres du point C accoste-t-il ?
      Quel est alors la durée de parcours du gardien en heures et minutes ?
   b) En utilisant un calcul, répondre aux questions :
      Quelles distances parcourt le gardien en canot et à pied ?
      Combien de temps passe-t-il dans son canot et combien de temps marche-t-il ?

**Question bonus**

On pose CM = x et on nomme f la fonction qui à CM (n en km) associe la durée du parcours (en heures).

Donner l'expression de f(x) en fonction de x.

CORRECTION

**Exercice 1** (2 points)

1) Attention : on n'additionne pas les pourcentages.
On multiplie entre eux les coefficients multiplicateurs.
Le coefficient associé à une augmentation de t% est $1 + \frac{t}{100}$.
On a donc : $1{,}04\times1{,}02\times1{,}06 \approx 1{,}124$
Le pourcentage d'augmentation du prix de ce vêtement de 2006 à 2009 est donc environ 12,4 %

Remarque : ce pourcentage est proche de la somme des pourcentages (4+2+6) car ici les pourcentages d'augmentation sont faibles.

2) Attention : on ne divise pas le pourcentage global par 3.
Le pourcentage moyen annuel m d'augmentation du prix de ce vêtement de 2006 à 2009 vérifie la relation :

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^3 = 1{,}04\times1{,}02\times1{,}06$$

D'où : $1 + \frac{m}{100} = \sqrt[3]{1{,}04\times1{,}02\times1{,}06}$

Soit : $m = 100\times(\sqrt[3]{1{,}04\times1{,}02\times1{,}06} - 1) \approx 3{,}99$

Remarque : ce pourcentage est proche de la somme des pourcentages divisée par 3 (4+2+6)/3 car ici les pourcentages d'augmentation sont faibles.

**Exercice 2** (11 points)

**Partie A** (4 points)

1) $u_2 = u_1 - 20 = 430 - 20 = 410$ €
$u_3 = u_2 - 20 = 410 - 20 = 390$ €
2) $(u_n)$ est une suite arithmétique car la différence entre deux termes consécutifs est constante (égale à 20 €).
3) $u_n = u_0 + n\times r = 450 - 20n$
4) On résout l'inéquation $u_n \leq \frac{450}{2}$

Soit : $450 - 20n \leq 225$
Soit : $-20n \leq -225$
Soit $n \geq \frac{225}{20} = 11{,}25$

Pierre doit attendre 12 ans pour atteindre le bonus maximal.

**Partie B** (7 points)

1) Une diminution de 5% correspond à un coefficient multiplicateur de 0,95.
   Donc $v_1 = v_0 \times 0{,}95 = 450 \times 0{,}95 = 427{,}50$ €
   $v_2 = v_1 \times 0{,}95 = 427{,}50 \times 0{,}95 = 406{,}125 \approx 406{,}12$ €
   $v_3 = v_2 \times 0{,}95 = 406{,}125 \times 0{,}95 = 385{,}81875 \approx 385{,}82$ €
2) La suite $(v_n)$ est une suite géométrique car le quotient de termes consécutifs est constant (égal à 0,95.)
3) $v_n = v_0 \times q^n = 450 \times 0{,}95^n$
4) a) Formule en D3 : = C3 * 0,95 (ou = $C$3*0,95^D2)
   Formule en D4 : = D3 - C3
   b)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | n | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | | $v_n$ | 450,00 € | 427,50 € | 406,13 € | 385,82 € |
| 4 | | $v_n - v_{n-1}$ | | - 22,50 € | - 21,38 € | - 20,31 € |

   c) La cellule F4 contient la baisse de la prime entre l'année 3 et l'année 2 (soit environ 20,31 €).
5) On doit résoudre l'inéquation $450 \times 0{,}95^n \leq 225$
   Soit $0{,}95^n \leq 0{,}5$

   On ne sait pas résoudre algébriquement cette inéquation en Première L. On peut la résoudre par tâtonnements successifs.

   $0{,}95^{13} \approx 0{,}51 > 0{,}5$
   $0{,}95^{14} \approx 0{,}48 < 0{,}5$

   Pierre doit attendre 14 ans pour atteindre le bonus maximal.

**<u>Exercice 3</u>** (9 points)

**Partie A** (3 points)

1) On utilise la relation $t = \dfrac{d}{v}$ liant distance (d), vitesse (v) et durée (t).

$$t_{AC} = \frac{AC}{4} = \frac{9}{4}\, 2{,}25 \text{ h}$$

$$t_{CB} = \frac{CB}{5} = \frac{15}{5} = 3 \text{ h}$$

La durée totale est donc $t_{AC} + t_{CB} = 5,25$ h.
Soit 5 heures et 15 minutes.

2) a) En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C, on obtient :

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306} \approx 17,5 \text{ km.}$$

b) La durée correspondante est : $t_{AB} = \dfrac{AB}{4} \approx 4,37$ h

$0,37 \text{ h} = 0,37 \times 60 \approx 22$ minutes.
La durée du trajet AB est donc environ 4 heures et 22 minutes

**Partie B** (5 points + 1 points bonus)

1) L'ordonnée à l'origine de la courbe correspond au trajet AC (canot) – CB (à pied) : on lit environ 5,25 h.
Ce qui correspond bien au calcul de la question A – 1)

2) a) On lit l'abscisse et l'ordonnée du point le plus bas de la courbe.
Le gardien accoste donc à 12 km du point C (abscisse du point le plus bas).
La durée de parcours du gardien est environ 4,35 h (ordonnée du point le plus bas de la courbe).
Soit environ 4h 21 minutes.

b) En utilisant un calcul, répondre aux questions :

La distance AM parcourue en canot est donnée par l'application du théorème de Pythagore dans le triangle ACM rectangle en C :

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ km.}$$

La durée correspondante est $t_{AM} = \dfrac{AM}{4} = 3,75$ h soit 3 heures et 45 minutes.

La distance CM parcourue à pied est :

$$MB = CB - CM = 15 - 12 = 3 \text{ km.}$$

La durée correspondante est $t_{MB} = \dfrac{3}{5} = 0,6$ h : soit environ 36 minutes.

Quelles distances parcourt le gardien en canot et à pied ?
Combien de temps passe-t-il dans son canot et combien de temps marche-t-il ?

**Question bonus**

$$f(x) = \frac{AM}{4} + \frac{MB}{5} = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$