Première ES Exercices sur les suites numériques

Exercice 1 :

On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + 1} \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de ces suites.

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n^2 - 2n + 1.$$

Exprimer en fonction de n : u_{n+1}, u_{n+3} et u_{n-1}.

Exercice 3 :

Chaque année, une population augmente de 5% du fait de l'accroissement naturel et diminue de 1000 habitants du fait de l'émigration.

La population est de 30 000 habitants au départ.

a) Modéliser cette situation par une suite (u_n) en écrivant une relation de récurrence.
b) Préciser le terme initial et calculer les quatre termes suivants.

Exercice 4 :

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.
b) Etudier le sens de variation de la suite (v_n) définie par $v_n = 1{,}4^n$

Exercice 5 :

u est une suite géométrique à termes positifs tels que $u_4 = 0{,}84$ et $u_6 = 5{,}25$.

a) Calculer la raison q de cette suite.
b) Calculer u_0.
c) Exprimer u_n en fonction de n.
d) Quel est le sens de variation de cette suite ?

Exercice 6 :

On estime à 850 millions de barils de pétrole la réserve totale exploitable d'un gisement pétrolifère en 2005. Chaque année, le pétrole extrait représente 20% du total de la réserve exploitable restante. On note u_n la réserve exploitable restante (en millions de barils), en décembre de l'année (2005 + n) et on a $u_0 = 850$.

a) Calculer u_1 et u_2.
b) Modéliser cette situation par une suite.
c) Le gisement sera considéré comme épuisé lorsque la réserve exploitable sera inférieure à un million de barils. Déterminer à partir de quelle année ce sera le cas.

CORRECTION

Exercice 1 :

On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + 1} \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de ces suites.

$u_1 = 2\times u_0 + 1 = 2\times 1 + 1 = 3$

$u_2 = 2\times u_1 + 1 = 2\times 3 + 1 = 7$

$u_3 = 2\times u_2 + 1 = 2\times 7 + 1 = 15$

$u_4 = 2\times u_3 + 1 = 2\times 15 + 1 = 31$

$$v_1 = \frac{1}{v_0 + 1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$v_2 = \frac{1}{v_1 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$v_3 = \frac{1}{v_2 + 1} = \frac{1}{\frac{3}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$v_4 = \frac{1}{v_3 + 1} = \frac{1}{\frac{4}{7} + 1} = \frac{1}{\frac{11}{7}} = \frac{7}{11}$$

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n^2 - 2n + 1.$$

Exprimer en fonction de n : u_{n+1} , u_{n+3} et u_{n-1}.

$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 = 3(n^2 + 2n + 1) - 2n - 2 + 1 = 3n^2 + 6n + 3 - 2n - 1$

$u_{n+1} = 3n^2 + 4n + 2$

$u_{n+3} = 3(n+3)^2 - 2(n+3) + 1 = 3(n^2 + 6n + 9) - 2n - 6 + 1 = 3n^2 + 18n + 27 - 2n - 5$

$u_{n+3} = 3n^2 + 16n + 22$

$u_{n-1} = 3(n-1)^2 - 2(n-1) + 1 = 3(n^2 - 2n + 1) -2n + 2 + 1 = 3n^2 -6n + 3 - 2n + 3$

$u_{n-1} = 3n^2 -8n + 6$

Exercice 3 :

CORRECTION

Chaque année, une population augmente de 5% du fait de l'accroissement naturel et diminue de 1000 habitants du fait de l'émigration.

La population est de 30 000 habitants au départ.

a) Modéliser cette situation par une suite (u_n) en écrivant une relation de récurrence.
b) Préciser le terme initial et calculer les quatre termes suivants.
c) Etudier le sens de variation de la suite.

a) Une augmentation de 5% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$.

On a donc : $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n - 1000$

b) $u_0 = 30\,000$

$u_1 = 1{,}05 \times u_0 - 1000 = 1{,}05 \times 30000 - 1000 = 30\,500$

$u_2 = 1{,}05 \times u_1 - 1000 = 1{,}05 \times 30500 - 1000 = 31025$

$u_3 = 1{,}05 \times u_2 - 1000 = 1{,}05 \times 31025 - 1000 = 31576{,}25$

$u_4 = 1{,}05 \times u_3 - 1000 = 1{,}05 \times 31576{,}25 - 1000 = 32155{,}0625$

Exercice 4 :

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+2}$.
b) Etudier le sens de variation de la suite (v_n) définie par $v_n = 1{,}4^n$

a) 1ère méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+1+2} - \frac{n}{n+2} = \frac{(n+1)\times(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{n(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 + 2n + n + 2 - (n^2 + 3n)}{(n+3)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 2 - n^2 - 3n}{(n+3)(n+2)} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

Or comme $n \geq 0$, $(n+3)(n+2) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc $u_{n+1} > u_n$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

CORRECTION

2ème méthode

$u_n = f(n)$ avec f étant la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

La fonction f et la suite (u_n) ont le même sens de variation sur $[0\ ;+\infty[$.

Or $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x + 2$

Et $f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$

Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$

D'où : $f'(x) = \frac{1\times(x+2) - x\times 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

Or pour $x \geq 0$, $(x+2)^2 > 0$; donc $\frac{2}{(x+2)^2} > 0$.

Donc $f'(x) > 0$.

Donc f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et la suite (u_n) est aussi croissante.

b) $v_{n+1} - v_n = 1{,}4^{n+1} - 1{,}4^n = 1{,}4^n\times(1{,}4 - 1) = 1{,}4^n\times 0{,}4$

Or $1{,}4^n\times 0{,}4 > 0$.

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$

Et $v_{n+1} > v_n$

Donc la suite (v_n) est croissante.

Exercice 5 :

u est une suite géométrique à termes positifs tels que $u_4 = 0{,}84$ et $u_6 = 5{,}25$.

a) Calculer la raison q de cette suite.
b) Calculer u_0.
c) Exprimer u_n en fonction de n.
d) Quel est le sens de variation de cette suite ?

a) $u_6 = q\times u_5 = q\times q\times u_4 = q^2\times u_4$

Donc $q^2 = \frac{u_6}{u_4} = \frac{5{,}25}{0{,}84} = 6{,}25 = 2{,}5^2$

Donc comme $q > 0$, alors $q = 2{,}5$.

b) $u_3 = \frac{u_4}{q} = \frac{0{,}84}{2{,}5} = 0{,}336$

$u_2 = \frac{u_3}{q} = \frac{0{,}336}{2{,}5} = 0{,}1344$

$u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{0{,}1344}{2{,}5} = 0{,}05376$

$u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{0{,}05376}{2{,}5} = 0{,}021504$

c) $u_n = u_0\times q^n = 0{,}021504\times 2{,}5^n$

d) Comme $q > 1$, alors la suite u est strictement croissante.

CORRECTION

Exercice 6 :

On estime à 850 millions de barils de pétrole la réserve totale exploitable d'un gisement pétrolifère en 2005. Chaque année, le pétrole extrait représente 20% du total de la réserve exploitable restante. On note u_n la réserve exploitable restante (en millions de barils), en décembre de l'année (2005 + n) et on a $u_0 = 850$.

a) Calculer u_1 et u_2.
b) Modéliser cette situation par une suite.
Le gisement sera considéré comme épuisé lorsque la réserve exploitable sera inférieure à un million de barils. Déterminer à partir de quelle année ce sera le cas.

Une diminution de 20% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{20}{100} = 0,80$.

a) $u_1 = u_0 \times 0,8 = 850 \times 0,8 = 680$

$u_2 = u_1 \times 0,8 = 680 \times 0,8 = 544$

b) Soit (u_n) la suite qui donne le nombre de barils pour l'année 2005 + n.

On a $u_0 = 850$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme 850 et de raison 0,8.

On a $u_{n+1} = 0,8 \times u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n = 850 \times 0,8^n$.

Pour connaitre à partir de quelle année le nombre de barils sera inférieur à 1 million, il faut résoudre l'inéquation suivante :

$$u_n < 1.$$

En procédant par tâtonnement, on vérifie que :

$u_{30} = 850 \times 0,8^{30} \approx 1,05 > 1$ et $u_{31} = 850 \times 0,8^{31} \approx 0,84 < 1$.

2005 + 31 = 2036.

C'est donc à partir de 2036 que le gisement sera considéré comme épuisé.